Лекция по комбинаторике

Базилевич Григорий, Кориненко Матвей, Небабин Никита

Февраль 2022

1 Комбинаторика, некоторые ее термины, правила

Комбинаторика — область математики, которая изучает вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных определенным правилам, можно составить из элементов имеющегося множества.

В комбинаторике чаще вместо слова комбинация используют слово **выборка**.

Выборкой **объемом** k называется выборка, состоящая из k элементов.

Если важен порядок, в котором произведена выборка элементов, то говорят об **упорядоченной выборке**, если порядок не важен, то о **неупорядоченной**.

Правило сложения в комбинаторике утверждает, что если элемент A можно выбрать n способами, а элемент B — m способами, то выбрать элемент A **ИЛИ** B можно $n+m$ способами. Обобщается на произвольное количество элементов, принимается за аксиому.

Правило умножения в комбинаторике утверждает, что если элемент A можно выбрать n способами, а элемент B — m способами, то пару элементов (A, B) можно выбрать $n \cdot m$ способами. Так же как и правило суммы обобщается на произвольное число элементов, принимается за аксиому.

2 Перестановки

Перестановками называются выборки элементов, которые отличаются только порядком расположения элементов, но не самими элементами.

2.1 Перестановки без повторений

Давайте посчитаем количество перестановок P_n для множества элементов размера n. Для первого элемента в изначально пустой перестановке у нас есть n свободных мест, поставим его на любое из них. В оставшемся множестве у нас есть $(n-1)$ элемент. Давайте выберем один из них и поставим на любое из оставшихся $(n-1)$ свободных мест. Продолжим процесс, пока множество не опустеет. Итого количество перестановок из n элементов равно

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

2.2 Перестановки с повторениями

Пусть теперь среди элементов начального набора есть повторяющиеся. Пусть n_1 — количество элементов первого типа, n_2 — второго типа, ... , n_k — k-того типа.

Давайте рассмотрим определенную перестановку. В ней содержится n_1 элементов, переставляя которые не меняется итоговая перестановка. Аналогично для $n_2, n_3, \ldots, n_k$. Иными словами, имеется P_{n_1} одинаковых способов расставить внутри одинаковой перестановки n_1 одинаковых элементов. Чтобы не учитывать повторяющиеся перестановки, нужно полное число перестановок P_n разделить на P_{n_1}. Аналогичные размышления проведем для $n_2, n_3, \ldots, n_k$

Таким образом, количество перестановок с учетом одинаковых $n_1, n_2, \ldots, n_k$ элементов равно

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{P_n}{P_{n_1} \cdot P_{n_2} \cdot \ldots \cdot P_{n_k}} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

3 Размещения

3.1 Размещения без повторений

Размещением n элементов по m местам называются такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа данных n элементов, отличаются друг от друга составом элементов, либо порядком их расположения. Иными словами, размещением n элементов по m называется упорядоченная выборка объемом m из множества элементов размера n.

Давайте найдем количество размещений элементов из множества размера n по k местам, обозначим это число за A_n^k (A из n по k). Первый элемент для размещения можно выбрать n способами, второй — $(n-1)$ способом, ..., k-тый — $(n-k+1)$ способом. Тогда число A_n^k равно

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Сделав формулу более компактной, получим

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k) \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3.2 Размещения с повторениями

Размещение с повторениями — размещение элементов в предположении, что каждый элемент может участвовать в нем несколько раз.

В таком случае каждый из n элементов множества может занимать любое из k мест в размещении. Поэтому число размещений с повторениями из n элементов по k A_n^{-k} равно

$$A_n^{-k} = n^k$$

4 Сочетания

4.1 Сочетания без повторений

Сочетанием без повторений размера k из n элементов называется неупорядоченная выборка k элементов из множества размера n.

Обозначим количество сочетаний объемом k из элементов множества размера n за число C_n^k (C из n по k). Найти это число, умея вычислять количество размещений, несложно.

Для любого набора элементов размера k существует P_k перестановок, поэтому количество **упорядоченных** выборок (размещений) объема k из n элементов равно

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k$$

Выразив отсюда C_n^k, получим

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

4.2 Сочетания с повторениями

Сочетание с повторениями — такая неупорядоченная выборка k элементов из множества размера n, что элемент множества может входить в выборку несколько раз.

Для того, чтобы вывести количество сочетаний объемом k из n элементов с повторениями, представим задачу иным образом. Пусть мы имеем на руках k абсолютно одинаковых шариков. Наша цель — разбить их на n групп (это будет означать принадлежность шарика i-ому типу элемента из начального множества). Для этого поставим эти k шариков в ряд и найдем количество способов поставить между ними $(n-1)$ перегородку, то есть разбить шарики на n типов.

Всего сейчас имеется $(k+n-1)$ элемент, из них какие-то k — шарики, какие-то $(n-1)$ — перегородки. Тогда задача сводится к поиску количества способов выбрать k элементов из этого ряда. А это ни что иное как количество сочетаний C_{k+n-1}^{k}.

Таким образом, количество сочетаний k элементов из множества размера n с повторениями C_n^{-k} равно

$$C_n^{-k} = C_{k+n-1}^{k}$$

5 Биноминальный коэффициент

Бином Ньютона — формула для разложения на отдельные слагаемые целой неотрицательной степени суммы двух переменных. Имеет вид:

$$\begin{aligned}(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \\ + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots + \binom{n}{n} b^n\end{aligned}$$

Где $\binom{n}{k}$ — **биноминальный коэффициент**.

Чтобы умножить скобки, нам необходимо из каждой выбрать по одному слагаемому, перемножить и все полученные произведения сложить. Для получения произведения $a^k b^{n-k}$ необходимо ровно из k скобок взять a, а из оставшихся $n-k$ взять b. Заметим, что это в точности количество сочетаний без повторений, тогда

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Свойства Доказываются представлением биноминального коэффициента через C_n^k

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Треугольник Паскаля Из тождества

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

следует, что мы можем представить биноминальный коэффициент в виде таблицы:

	0	1	2	3	4	k
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
n						

Этот треугольник называется **треугольником Паскаля** и, при повороте на 45° по часовой стрелке относительно вершины, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого каждое число является суммой двух вышестоящих.

Полезный факт

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$

Фактически, мы утверждаем, что сумма всех чисел в одной строчке треугольника Паскаля равна 2^n. Это очевидно доказывается, если подставить вместо a и b единицы в формулу бинома Ньютона. А мы докажем с помощью индукции.

База: $\binom{0}{0} = 1 = 2^0$.

Теперь пусть верно $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, докажем, $\sum\limits_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = 2^{n+1}$.

Заметим (по треугольнику), что $\binom{n+1}{0} = \binom{n}{0}$ $\binom{n+1}{n+1} = \binom{n}{n}$.
Оставшиеся $\binom{n}{k}$ распишем по первому свойству как $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \ldots + \binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1} =$$
$$= \binom{n}{0} + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right) + \ldots + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right) + \binom{n}{n} =$$
$$= 2 \times (\binom{n}{0} + \ldots + \binom{n}{n}) = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

Утверждение доказано.

Быстрое вычисление биноминального коэффициента При фиксированном значении k биномиальные коэффициенты могут быть вычислены по рекуррентной формуле $\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$ при $\binom{k}{k} = 1$. При фиксированном значении n можно использовать формулу $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$ при $\binom{n}{0} = 1$. Эти формулы легко доказываются через треугольник Паскаля.

6 TL; DR

Правило сложения в комбинаторике утверждает, что если элемент A можно выбрать n способами, а элемент B — m способами, то выбрать элемент A **ИЛИ** B можно $n+m$ способами.

Правило умножения в комбинаторике утверждает, что если элемент A можно выбрать n способами, а элемент B — m способами, то пару элементов (A, B) можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Перестановка — упорядоченная выборка объемом n из элементов множества размера n. Число перестановок из n элементов равно

$$P_n = n!$$

Число перестановок с учетом наличия **одинаковых элементов** равно

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Размещение n элементов по k — упорядоченная выборка объема k из элементов множества размера n. Число размещений из n элементов по k равно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Размещение с повторениями — размещение элементов в предположении, что каждый элемент может участвовать в нем несколько раз. Число размещений с повторениями равно

$$A_n^{-k} = n^k$$

Сочетание n элементов по k — неупорядоченная выборка объема k из элементов множества размера n. Число таких сочетаний равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Сочетание с повторениями — такая неупорядоченная выборка k элементов из множества размера n, что элемент множества может входить в выборку несколько раз. Количество таких сочетаний равно

$$C_n^{-k} = C_{k+n-1}^k$$